2018-2019 Yılı, MAT 311 Kısmi Diferansiyel Denklemler I Arasınavı 23.11.2018

Numara: İsim-Soyisim:

SORULAR

1. f yeteri kadar sürekli türevlere sahip keyfi fonksiyon olmak üzere $z = xyf(z(x+y))$ şeklinde verilen yüzey ailesinin sağladığı en küçük basamaktan kısmi türevli denklemi bulunuz. Burada z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenlerdir.
2. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ elopsoidi ile $x - 2y + 3z = 2$ düzleminin $Q_0(1,1,1)$ noktasında oluşturdukları açıyı bulunuz.
3. $p - 2q = -2y$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. $(p = z_x, q = z_y)$
4. $(y+z)p + (x-z)q = -(y+x)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. $(p = z_x, q = z_y)$
5. $F(x,y,z,p,q) = 0$ şeklindeki kısmi türevli denklem için Lagrange yardımcı sistemini yazınız.

CEVAPLAR

1) $z = xyf(z(x+y))$

$$z_x = yf(z(x+y)) + xyf'(z(x+y))\cdot[z_x(x+y)+z]$$

$$z_y = xf(z(x+y)) + xyf'(z(x+y))\cdot[z_y(x+y)+z]$$

$$z_x = \frac{z}{x} + xyf'(z(x+y))\cdot[z_x(x+y)+z]$$

$$z_y = \frac{z}{y} + xyf'(z(x+y))\cdot[z_y(x+y)+z]$$

$$\frac{z_x - \frac{z}{x}}{z_x(x+y)+z} = \frac{z_y - \frac{z}{y}}{z_y(x+y)+z}$$

$$z_x \cancel{z_y(x+y)} + z_x\cancel{z} - \frac{\cancel{z}}{x} z_y(x+y) - \frac{z}{x} = \cancel{z_y z_x(x+y)} - \frac{\cancel{z}}{y} z_x(x+y) + z_y\cancel{z} - \frac{z}{y}$$

$$z_x - z_y - \frac{y}{x} z_y - \frac{z}{x} = -\frac{x}{y} z_x - z_x + z_y - \frac{z}{y}$$

$$\left(2 + \frac{x}{y}\right) z_x - \left(2 + \frac{y}{x}\right) z_y = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) z$$

$$\left(2 + \frac{x}{y}\right) p - \left(2 + \frac{y}{x}\right) q = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) z$$

2) $F(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2-4 = 0$ $\rightarrow$ $F(1,1,1)=0$

$G(x,y,z) = x-2y+3z-2=0$ $\quad$ $G(1,1,1)=0$

F ve G yüzeyleri $P_0(1,1,1)$ noktasında kesişmektedir. O halde P_0 noktasında iki yüzey arasındaki açının ölçüsü $\vec{N_F} = (F_x, F_y, F_z) = \text{grad}\, F$, $\vec{N_G} = (G_x, G_y, G_z) = \text{grad}\, G$ normalleri arasındaki açının ölçüsü ile aynıdır. Bu iki yüzeyin P_0 noktasında oluşturdukları açı θ ise

$$\cos\theta = \frac{F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}} \quad ; \quad \begin{aligned} \vec{N_F} &= (2x, 4y, 2z) \\ \vec{N_G} &= (1, -2, 3) \end{aligned}$$

$$= \left. \frac{2x-8y+6z}{\sqrt{4x^2+16y^2+4z^2}\sqrt{1+4+9}} \right|_{P_0(1,1,1)} = \frac{2-8+6}{\sqrt{4+16+4}\sqrt{14}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{24}\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

3) $z_x - 2z_y = -2y \qquad (*)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = -2 \Rightarrow dy + 2dx = 0 \Rightarrow y + 2x = c$$

$$\begin{aligned} c = \xi &= y+2x \\ \eta &= y \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = 2z_\xi$$

$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = z_\xi + z_\eta$$

z_x ve z_y (*) denkleminde yerine yazılarak

$$2z_\xi - 2(z_\xi + z_\eta) = -2\eta$$

$$\cancel{2z_\xi} - \cancel{2z_\xi} - 2z_\eta = -2\eta \Rightarrow z_\eta = \eta \Rightarrow \frac{dz}{d\eta} = \eta$$

$\int dz = \int \eta \, d\eta \Rightarrow z = \frac{\eta^2}{2} + f(\xi)$ elde edilir.

$$z = \frac{\eta^2}{2} + f(\xi) = \frac{y^2}{2} + f(y+2x)$$

4) $(y+z)z_x + (x-z)z_y = -(y+x)$ denklemine karşılık

gelen Lagrange yardımcı sistemi

$\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{-y-x}$ olur. Buradan

$\dfrac{dx + dy + dz}{(y+z)+(x-z)+(-y-x)}$ ifadesinin paydası 0 olduğundan

$dx + dy + dz = 0$ almak zorundayız. Buradan

$u(x,y,z) = x + y + z = c_1$ bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{x\,dx}{x(y+z)} = \frac{y\,dy}{y(x-z)} = \frac{z\,dz}{z(-x-y)} \rightarrow \frac{x\,dx - y\,dy + z\,dz}{xy + xz - yx + yz - zx - zy}$$

ifadesinin paydası 0 dır. O halde

$x\,dx - y\,dy + z\,dz = 0$ tam diferansiyelinin integral-lenmesiyle

$V(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 = c_2$ elde edilir.

Böylece genel çözüm

$F(u,v) = F(x+y+z,\ x^2-y^2+z^2) = 0$ bulunur. Yani

$x+y+z = f(x^2-y^2+z^2)$ veya

$x^2-y^2+z^2 = g(x+y+z)$ şeklinde yazılabilir.

Burada $f, g \in C'[D]$ dir.

5) $F(x,y,z,p,q)=0$ denklemi ile bağdaşabilen bir başka denklem $G(x,y,z,p,q) = \alpha$ olsun. (α sabit)

$$[F,G] = \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dG}{dx} - \frac{\partial G}{\partial p}\frac{dF}{dx} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dG}{dy} - \frac{\partial G}{\partial q}\cdot\frac{dF}{dy} = 0$$

bağdaşabilme koşulundan

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial G}{\partial z}$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial G}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial G}{\partial q} = 0$$

Bu denklemin Lagrange yardımcı sistemi olur.

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p+qF_q} = \frac{-dp}{F_x+pF_z} = \frac{-dq}{F_y+qF_z} = \frac{dG}{0}$$

olarak bulunur.